**Valores y vectores propios**

**Autovalores, eigenvalues o valores propios**

Este concepto del Algebra Lineal, posee varias aplicaciones en Economía, Estadística, Ecuaciones diferenciales, Estabilidad de sistemas lineales, Sistemas eléctricos, entre otros.

Si se considera la matriz A =  y los vectores u =  y v=  de IR2, se analiza que ocurre cuando se realiza el producto de la matriz A por cada uno de los vectores dados:

A.u = . =  , se obtiene un vector linealmente independiente a u

A.v = . =  , se obtiene un vector linealmente dependiente a v

En este último caso se tiene que: A.v = 2.v , se dice que 2 es su valor propio.

Un escalar λ es un valor propio relativo a la matriz A, y el vector propio de una matriz A de orden n es un vector de IRn no nulo, tal que para cierto valor λ real, se cumple que:

A. v = λ. v

**Autovectores, eigenvecs o vectores propios**

Se presentan a continuación dos definiciones relativas a este objeto matemático:

Definición 1

Sea f un endomorfismo en el espacio vectorial V (IR), y A su matriz asociada en cierta base B

f : V → V

u → f(u) tal que A . [ u ] = [ f(u) ]

Un vector u de V, no nulo, es un **vector propio, eigenvec,** **o** **autovector** característico del endomorfismo f, si y sólo si existe un escalar λ tal que **f (u) = λ . u** , lo que equivale a que **A . [ u ] = λ [ u ].**

u es un vector propio relativo al **escalar λ** , y **λ** recibe el nombre de **valor propio**, **eigenval o autovalor**.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y f un endomorfismo definido en V, si u es un vector propio del endomorfismo f relativo al valor propio λ, resulta que todo vector linealmente dependiente de u también es un vector propio correspondiente al mismo valor propio λ.

Demostración

f es un endomorfismo y u es un vector propio de él relativo al valor propio λ, por lo tanto:

f (u) = λ . u

Busquemos ahora la imagen de v = t .u por f:

f (v) = f ( t .u ) = t . f (u) = t . ( λ. u ) = λ . ( t. u ) = λ . v

Lo que indica que v también es un vector propio relativo al valor propio λ : **f (v) = λ. v**

**Subespacio propio o eigenespacio**

Si u es un vector propio, u es no nulo, luego el conjunto de los vectores linealmente dependientes a él determinan un subespacio formado por los vectores **v**, es decir:

U = { v / v ∈ V ∧ v = t . u , t ∈ IR }

Este **conjunto que contiene a los vectores propios** generados por el vector propio u, es un subespacio vectorial de V que recibe el nombre de **subespacio propio o característico** del endomorfismo f, respecto al valor propio λ.

Veamos ahora de qué forma se pueden determinar los valores, vectores y espacios propios:

f es un endomorfismo en V del cual conocemos su matriz asociada A y queremos hallar los vectores que hacen posible: **A . [ u ] = λ [ u ]** ( A ∈ Mnxn )

Esta expresión la podemos escribir:

**A . [ u ] = λ. I. [ u ]** ( I es la matriz identidad en Mnxn )

Por lo tanto:

**A . [ u ] - λ. I. [ u ] = 0** ( 0 es la matriz nula )

O bien:

**(** **A - λ. I ) . [ u ] = 0**

Se obtiene un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y para que el vector u, ***no nulo***, verifique esta última expresión para algún λ, debe verificarse que:

**det ( A - λ. I ) = 0**

Lo que equivale a decir que el sistema homogéneo admite infinitas soluciones.

La expresión: **det ( A - λ. I ) = 0** se conoce como ecuación característica, los escalares λ que la satisfacen son los valores propios.

Sustituyendo los valores propios λ en el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

**(** **A - λ. I ) . [ u ] = 0**

se obtienen los vectores propios y subespacios característicos respectivos.

Definición 2

Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces se dice que un vector X no nulo de IRn es un **eigenvector** (autovector) o **vector propio** de A, si A.X es múltiplo escalar de X, es decir:

A.X = λ I.X, siendo I la matriz identidad de orden n

El escalar λ se denomina **eigenvalor** (autovalor) de A o **valor propio** de A, y se dice que X es un **vector propio** de A correspondiente a λ.

Para determinar los valores propios de una matriz A cuadrada de orden n, se escribe:

A.X = λ I.X

en su forma equivalente: λ I.X - A.X = O

(λ I - A).X = O

Para que λ sea un valor propio de A, debe haber una solución no nula de este sistema de ecuaciones lineales homogéneo, es decir se debe verificar que:

det (λ I - A) = 0

A la expresión det (λ I - A) = 0, se la conoce como **ecuación característica.**

Los escalares λ que la satisfacen se los denomina **valores propios**.

Su **polinomio característico** está dado por p(λ) = det(λ I - A)= ( λ- λ1) μ1( λ- λ2) μ2 ……( λ- λr) μr

La **multiplicidad algebraica** μide un autovalor λ, es su multiplicidad como raíz del polinomio característico.

Ejemplo

Sea la matriz A = de orden dos.

Se buscan los valores propios a partir de la ecuación característica: det (λ I - A) = 0

λ. I = λ. =  , λ I - A = 

det ( λ I - A ) = ( λ - 3 ) ( λ +1 ) - 0 = λ2 - 2 λ - 3 = 0

λ2 - 2 λ - 3 = 0 es su ecuación característica

Luego resolviendo la ecuación característica, resulta: λ1 = 3 y λ2 = -1 que son sus valores propios.

Su polinomio característico es p(λ) = ( λ - 3 )1 ( λ +1 )1, luego la multiplicidad algebraica de λ1 es 1, y la de λ2 también es 1.

Propiedad:

Si una matriz de orden n tiene n valores propios no necesariamente distintos, el producto de los valores propios es igual al determinante de la matriz dada.

Teorema

***Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:***

1. ***λ es un valor propio de A***
2. ***El sistema de ecuaciones lineales homogéneo (λ I - A).X = O, tiene soluciones no triviales***
3. ***Existe un vector no nulo X en IRn, tal que A.X = λ I.X***
4. ***λ es una solución real de la ecuación característica det (λ I - A) = 0***

Los **vectores propios** de A correspondientes a los valores propios, son los vectores no nulos que satisfacen A.X = λ I.X. También se dice que los vectores propios de A correspondientes a los valores propios son los vectores no nulos en el espacio de las soluciones de la ecuación característica det (λ I - A) = 0. Como un vector propio u de V, es no nulo, todos los vectores linealmente dependientes a él determinan un conjunto de vectores denominado **subespacio propio** U, de tal forma que:

U = {v/v∈V, v = t.u , t de IR}

Es decir, cada valor propio determina un subespacio vectorial, que se lo denomina **espacio propio** de A correspondiente al valor propio λ. La **multiplicidad geométrica** de un autovalor λ es la dimensión del espacio propio asociado.

Ejemplo

Siguiendo con el ejemplo anterior, para determinar los vectores propios de A relativos a los valores propios λ1 = 3 y λ2 = -1, se plantea el sistema homogéneo que resulta de la ecuación matricial:

(λ I - A).X = O

Es decir: 

Sustituimos a λ por cada uno de los valores propios encontrados:

***Si λ = λ1 = 3*** ⇒  ⇒ -8. x + 4. y = 0 ⇒ y = 2. x

Por lo tanto el vector u = =  es solución del sistema para λ = λ1 = 3, de aquí que:

U1= { u / u = ∈ IR2 , x ∈ IR}, es el subespacio propio relativo al valor propio λ1 = 3

Un vector propio relativo a este valor propio sería por ejemplo: u1 = , que es el vector director de la recta vectorial U1. Como la dim( U1) = 1, luego la multiplicidad geométricade λ1 es 1.

***Si λ = λ2 = -1*** ⇒  ⇒ ⇒ x = 0

Por lo tanto el vector u == es solución del sistema para λ = λ2 = -1, de aquí que:

U2 = { u / u = ∈IR2 , y ∈ IR } es el subespacio propio relativo al valor propio λ2 = -1.

Un vector propio relativo a este valor propio sería por ejemplo: u2 = , que es el vector director de la recta vectorial U2. Como la dim( U2) = 1, luego la multiplicidad geométricade λ2 es 1.

Nota:

No siempre coinciden las multiplicidades algebraicas y geométricas.

**Proyecciones ortogonales**

Sea V (IR)un espacio vectorial eucl**í**deo, en el cual se ha definido el producto interior.

*Recordar:*

Sea V (IR) un espacio vectorial, existe una función < > tal que, a cada par de vectores de V, le asigna un número real, cumpliendo ciertos requisitos, esta función recibe el nombre de producto interior.

< > : V x V → IR

(u, v) → < u , v >

Condiciones: Para todo u, para todo v y para todo w del espacio V, y para cualquier t de IR:

< u, u > ≥ 0 ∧ (< u , u > = 0 ⇔ u =  )

< u, v > = < v , u >

< u, v + w > = < u , v > + < u , w >

t. < u, v > = < u, t.v> = < t.u, v>

Si u y v son dos vectores diferentes de V, entonces siempre es posible escribir a u como:

u = w1+ w2

En donde w1 es un vector linealmente dependiente a v y w2 es perpendicular a v.

w2 u

w1 v

El vector w1 recibe el nombre de proyección ortogonal de u sobre v y el vector w2 es la componente de u ortogonal a v.

Como w1 es combinación lineal de v, se puede escribir de la forma: w1 = k.v, reemplazando resulta

u = w1 + w2 = k.v + w2

Al realizar el producto interior de u y v:

< u, v > = < (k.v + w2) , v > = k.<v , v> + < w2, v > = k IIvII2 + 0 = k IIvII2

despejando k ,se obtiene: k = 

como w1= k.v, luego w1  =  v, este vector es la **proyección ortogonal de u sobre v.**

Al despejar w2 de u = w1 + w2 se obtiene:w2 = u - v, este vector es la **componente de u ortogonal a v.**

**Proceso de Gram –Schmidt**

En muchos problemas referidos a espacios vectoriales, la selección de una base se hace en forma conveniente, en este sentido la mejor estrategia para su selección es elegir bases ortonormales. El método de Gram –Schmidt permite obtenerlas.

Una base es ortonormal si sus vectores son normados y el producto interno entre cada par de vectores distintos, es nulo.

Teorema

***Si B = {v1, v2,, ... , vn } es una base ortonormal para un espacio vectorial V euclídeo, y u es un vector cualquiera de V, entonces u = < u, v1> v1 + < u, v2> v2 + …+ < u, vn> vn.***

Demostración

Sea B = {v1, v2,, ... , vn } una base de V, un vector u se puede escribir como combinación lineal de los vectores de B, en la forma:

u = k1.v1+ k2v2 +…+ kn vn

Se completa al demostrar que: ki = < u, vi> para i = 1, 2,…, n.

Para cada vector vi de B se tiene:

< u, vi > = < k1.v1+ k2v2 +…+ kn vn , vi > = k1 <v1,vi>+ k2<v2, vi>+…+ kn<vn, vi>

Dado que B = {v1, v2,, ... , vn } es una base ortonormal, se tiene que:

<vi, vi> = IIviII2 = 1 y <vi, vj> = 0 para i ≠ j

Por lo tanto, la ecuación anterior se simplifica hasta <u, vi> = ki

Teorema

***Si S = { v1, v2,, ... , vn } es una familia de vectores no nulos y ortogonales en un espacio vectorial V euclídeo, entonces S es una familia libre, es decir sus vectores son linealmente independientes.***

Demostración

Considerando la combinación trivial para los vectores de S:

k1.v1+ k2v2 +…+ kn vn=, para demostrar que S es una familia libre se debe probar que k1 = k2=.. = kn = 0

Para cada vi de S se tiene: < k1.v1+ k2v2 +…+ kn vn , vi >= < , vi >= 0

o, de modo equivalente: k1 <v1,vi>+ k2<v2, vi>+…+ kn<vn, vi> = 0

Por la ortogonalidad de los vectores de S, <vi, vj> = 0 para i ≠ j, la ecuación se reduce a

ki <vi, vj> = 0

Ya que los vectores de S son no nulos, luego <vi, vj> ≠ 0, por propiedad del producto interior, por tanto, ki= 0.

Ya que el subíndice i es arbitrario, se tiene que k1= k2= …= kn = 0.

Luego S es una familia libre y por lo tanto sus vectores son linealmente independientes.

Teorema

***Sea un espacio vectorial V euclídeo y S = { v1, v2,, ... , vn } una familia de vectores no nulos y ortonormales de V. Si W es el espacio generado por la familia S, entonces todo vector u de V se puede expresar en la forma u = w1 + w2, en donde w1 pertenece a W y w2 es ortogonal a W al hacer w1= < u, v1> v1 + < u, v2> v2 + …+ < u,vp> vp  y w2 = u- < u, v1> v1 - < u, v2> v2 - …- < u,vp> vp*** .

u w2

w2

w1

w1

W

Al vector w1 se lo denomina **proyección ortogonal** de u sobre W y se anota como:

**w1 =** **proy W u**

El vector **w2 = u –** **proy W u** se lo denomina **componente de u ortogonal a W.**

Teorema

***Todo espacio vectorial euclídeo V ≠ {} y de dimensión finita, posee una base ortonormal.***

Demostración

Sea V ≠ {} un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita n, y una base B = {u1, u2,,..., un } de V. La sucesión de pasos siguiente produce una base ortonormal B’ = {v1, v2,, ... , vn } de V.

Paso 1

A partir de un vector u1 de V se determina el vector v1 que es normado, es decir:

v1 = , v1 es un vector normado

Paso 2

Para construir un vector v2 normado y ortogonal a v1, se calcula la componente de u2 ortogonal al espacio W1 generado por v1, y, a continuación, se normaliza, es decir:

v2= = 

Si u2 -<u2, v1> v1 = 0, no se puede llevar a cabo la normalización, pero esto no puede suceder ya que entonces se tendría u2 = <u2, v1> v1= , lo cual afirma que u2 es un linealmente dependiente a u1, y contradice la independencia lineal de los vectores de la base B.

Paso 3

Para construir un vector v3 normado y ortogonal tanto a v1 como a v2, se calcula la componente de u3 ortogonal al espacio W2 generado por v1 y v2, y se normaliza, es decir:

v3 = = = 

Como en el paso 2, la independencia lineal de los vectores de la base B= {u1, u2,,..., un } asegura que u3 -<u3, v1> - <u3, v2> ≠ 0 de modo que siempre se puede efectuar la normalización.

Al continuar de esta manera se determinan los demás vectores v4, v5, …, vn. Como V es de dimensión n, y todo conjunto ortonormal es linealmente independiente, el conjunto B’ = {v1, v2,, ... , vn } es una base ortonormal de V.

La construcción de la base B’, paso a paso, es lo que se conoce como proceso de Gram- Schmidt.

**Diagonalización de matrices**

Definición

Se dice que una matriz cuadrada A de orden n es diagonalizable, si existe una matriz P inversible, tal que P-1 . A . P = D , siendo D una matriz diagonal. Se dice que la matriz P diagonaliza a A.

Teorema

***Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:***

1. ***A es diagonalizable***
2. ***A tiene n vectores propios linealmente independientes***

**Procedimiento para diagonalizar una matriz**

Paso 1

Sea una matriz cuadrada A de orden n, se determinan los vectores propios asociados a la matriz A.

Paso 2

Se forma con los vectores propios una matriz P.

Paso 3

Se analiza si la matriz P es inversible, en caso afirmativo se determina P-1.

Paso 4

Se realiza la multiplicación matricial P-1. A . P = D. Esta matriz D, que es diagonal, tiene en su diagonal principal los valores propios de A.

Nota

Si P no es inversible entonces es imposible diagonalizar a la matriz A.

Ejemplo:

Retomando el ejemplo anterior, si A = , los vectores u1 =  y u2 =  son los vectores propios relativos a los valores propios λ1 = 3 y λ2 = -1, respectivamente.

Se forma una matriz P con esos vectores propios, P= , y se analiza si P es inversible. Como el det (P) = 1, por lo tanto existe su matriz inversa P-1 = . Esto implica que A es diagonalizable, luego se realiza la multiplicación matricial: P-1. A . P = D = 

Se observa que, en la diagonal principal de la matriz D, se encuentran los valores propios de la matriz A.

Teorema

***Si v1, v2, …, vn son vectores propios de una matriz A, correspondientes a los valores propios λ1, λ2, …, λn, entonces la familia F = { v1, v2, …, vn } es libre, es decir sus vectores son linealmente independientes.***

Teorema

***Si una matriz A cuadrada de orden n, tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.***

Demostración

Si v1, v2, …, vn son vectores propios de una matriz A, correspondientes a los valores propios λ1, λ2, …, λn, entonces por el teorema anterior los vectores v1, v2, …, vn son linealmente independientes. Por tanto, A es diagonalizable.

**Diagonalización ortogonal**

Definición

Una matriz cuadrada A de orden n es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz P ortogonal tal que P-1. A . P = Pt . A . P sea diagonal. Se dice que la matriz P diagonaliza ortogonalmente a A.

Nota

Una matriz A es diagonalizable ortogonalmente si es simétrica, es decir si At = A.

**Procedimiento para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica**

Paso 1

Sea una matriz cuadrada A de orden n, se determinan los vectores propios asociados a la matriz A.

Paso 2

Se ortonormalizan dichos vectores propios. Se puede utilizar el proceso de Gram- Schmidt para tal fin.

Paso 3

Se forma con los vectores ya ortonormalizados un matriz P.

Paso 4

Se realiza la multiplicación matricial Pt. A . P = D. Esta matriz D, que es diagonal, tiene en su diagonal principal los valores propios de A.

Ejemplo:

Sea A =  una matriz tal que At = A

Se determinan los valores propios de A: λ1 = 4 y λ2 = 2 y sus vectores propios: u1 =  y u2 =  respectivamente.

Se deben ortonormalizar a estos vectores propios, para determinar la matriz P

v1 = 

|| u1 || =  , luego v1= 

< u2 , u1 > = 0 y || u2 || = 

v2= = 

La matriz formada por los vectores ortonormalizados es P = 

Se calcula D = P t . A . P =  que es una matriz diagonal, con los valores propios de A.

En conclusión, A es ortogonalmente diagonalizable.

Teorema

1. ***La ecuación característica de una matriz simétrica A solo tiene raíces reales.***
2. ***Si un valor propio de una matriz simétrica A, se repite k veces, como una raíz de la ecuación característica, entonces el espacio propio correspondiente al valor propio tiene dimensión k.***